

Technischer Bericht Nr. 26

Über die Bestimmung von biegekritischen Drehzahlen und
von Eigenfrequenzen transversal schwingender Stäbe auf
digitalen Rechenautomaten

Teil II: Verfahren, die sich aus der Energiemethode
herleiten lassen.

Prof. Dr. phil. P. MATTHIEU
Dipl. Ing. D. KRAUSE

Technischer Bericht Nr. 26

Ueber die Bestimmung von biegekritischen Drehzahlen und
von Eigenfrequenzen transversal schwingender Stäbe auf
digitalen Rechenautomaten

Teil II: Verfahren, die sich aus der Energiemethode
herleiten lassen.

Zusammenfassung:

In diesem Bericht wird versucht, Verfahren zu finden, mit denen man biegekritische Drehzahlen von Wellen in noch einfacherer Weise berechnen kann als nach den im Bericht Nr. 25 behandelten Restwertverfahren. Es zeigt sich, dass für bestimmte Lagerfälle Vereinfachungen mit einigen aus der Energiemethode herzuleitenden Verfahren zu erzielen sind. Die allgemeine Anwendbarkeit, wie sie bei den Restwertverfahren besteht, geht hier jedoch verloren. Bei den in Frage kommenden Verfahren wird anstelle der sonst üblichen graphischen Bestimmung der Biegelinie eine numerische Berechnung verwendet, die sich gut für digitale Rechenautomaten eignet, weil sie eine fortgesetzte Wiederholung von Matrizenmultiplikationen darstellt.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Die Bearbeiter

gez: P. Matthieu

gez: D. Krause

(Prof. Dr. phil. P. Matthieu)

(Dipl.-Ing. D. Krause)

Der Abteilungsleiter

Der Institutsdirektor

gez: P. Matthieu

gez: Gundlach

(Prof. Dr. phil. P. Matthieu)(Prof. Dr.-Ing. F.W. Gundlach)

Berlin - Charlottenburg, den 19. März 1959

1.) Einleitung

Während im Bericht Nr. 25 von den Restwertverfahren die Rede war, sollen hier Verfahren betrachtet werden, die sich aus der Energiemethode herleiten lassen. Es handelt sich um das Verfahren von K u l l oder das y -Verfahren von G r a m m e l, das Iterationsverfahren von S t o d o l a, das y^2 -Verfahren von G r a m m e l, das Verfahren von Z e r k o w i t z und das Verfahren von T r a e n k l e.

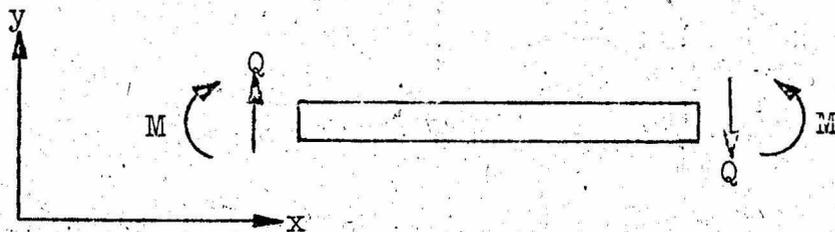
Bei allen diesen Verfahren sind elastische Linien unter dem Einfluss von Kräften oder Momenten zu bestimmen. Das geschieht im allgemeinen nach dem graphischen Verfahren von M o h r. Steht jedoch ein digitaler Rechenautomat zur Verfügung, wird man ein geeignetes numerisches Verfahren bevorzugen.

2.) Numerische Berechnung der elastischen Linie

Man geht von einem aus mehreren prismatischen Wellenstücken (Intervallen) bestehenden Ersatzsystem aus. Die über jedem Intervall infolge Eigengewicht oder Fliehkraft vorhandene kontinuierliche Kräfteverteilung wird in Einzelkräfte P an den Intervallgrenzen umgerechnet, damit man später eine sonst erforderliche Integration über die einzelnen Wellenstücke durch eine Summierung über die Intervallgrenzen ersetzen kann.

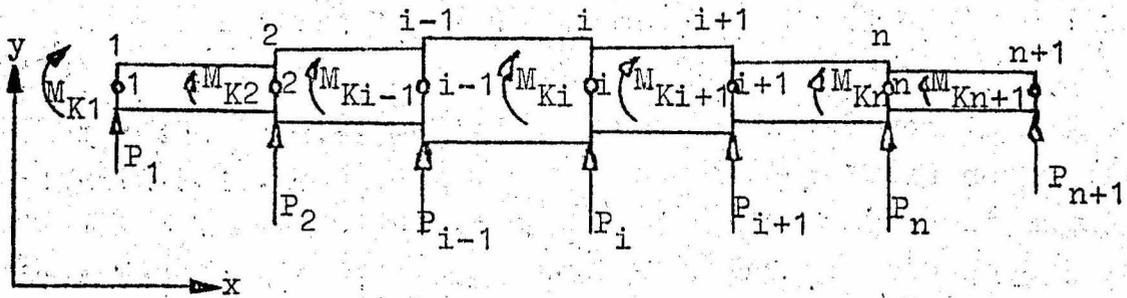
Die Angriffspunkte der eventuell vorhandenen Kreiselmomente M_K sind ebenfalls an die Intervallgrenzen zu legen.

Im allgemeinen Fall greifen also an jeder Intervallgrenze eine Kraft P und ein Kreiselmoment M_K an. Die positiven Richtungen der Kräfte und Momente werden wie folgt festgelegt.



Am linken Intervallende zählen nach oben gerichtete Kräfte und rechts herum drehende Momente positiv.

Ich betrachte nun eine Welle, die aus mehreren prismatischen Stücken verschiedener Länge und verschiedenen Durchmessers zusammengesetzt ist.



x_i zählt stets vom Intervallanfang.

Da keine Streckenlast vorhanden sein soll, gilt für jedes beliebige Intervall i

$$q_i(x_i) = 0 \quad 0 \leq x_i \leq l_i$$

Daraus erhält man mit

$$M_i(x_i) = E_i J_i y_i''(x_i)$$

$$Q_i(x_i) = E_i J_i y_i'''(x_i)$$

durch Integration die Beziehungen für Querkraft, Moment, Neigung und Durchbiegung:

$$Q_i(x_i) = A_i$$

$$M_i(x_i) = A_i x_i + B_i$$

$$y_i'(x_i) = \frac{1}{E_i J_i} \left\{ A_i \frac{x_i^2}{2} + B_i x_i \right\} + C_i$$

$$y_i(x_i) = \frac{1}{E_i J_i} \left\{ A_i \frac{x_i^3}{6} + B_i \frac{x_i^2}{2} \right\} + C_i x_i + D_i$$

A_i , B_i , C_i und D_i sind Integrationskonstanten, die aus den Randbedingungen am Anfang des i -ten Wellenstückes zu bestimmen sind.

$$Q_i(0) = A_i$$

$$M_i(0) = B_i$$

$$y_i'(0) = C_i$$

$$y_i(0) = D_i$$

Hiermit lässt sich das Gleichungssystem in der folgenden Form schreiben:

$$Q_i(x_i) = Q_i(0)$$

$$M_i(x_i) = Q_i(0)x_i + M_i(0)$$

$$y_i'(x_i) = \frac{1}{E_i J_i} \left\{ Q_i(0) \frac{x_i^2}{2} + M_i(0)x_i \right\} + y_i'(0) \quad (1)$$

$$y_i(x_i) = \frac{1}{E_i J_i} \left\{ Q_i(0) \frac{x_i^3}{6} + M_i(0) \frac{x_i^2}{2} \right\} + y_i'(0)x_i + y_i(0)$$

Für das Intervallende lauten diese Gleichungen

$$Q_i(l_i) = Q_i(0)$$

$$M_i(l_i) = Q_i(0)l_i + M_i(0)$$

$$y_i'(l_i) = \frac{1}{E_i J_i} \left\{ Q_i(0) \frac{l_i^2}{2} + M_i(0)l_i \right\} + y_i'(0)$$

$$y_i(l_i) = \frac{1}{E_i J_i} \left\{ Q_i(0) \frac{l_i^3}{6} + M_i(0) \frac{l_i^2}{2} \right\} + y_i'(0)l_i + y_i(0)$$

Beim Uebergang von einem Intervall zum anderen erhält man folgende Uebergangsbedingungen:

$$Q_{i+1}(0) = Q_i(l_i) + P_{i+1}$$

$$M_{i+1}(0) = M_i(l_i) + M_{K i+1}$$

$$y_{i+1}'(0) = y_i'(l_i)$$

$$y_{i+1}(0) = y_i(l_i)$$

Setzt man diese Beziehungen in das obige Gleichungssystem ein, so ergeben sich Rekursionsformeln, mit denen man aus den Zustandsgrößen am Anfang des einen Intervalls die Zustandsgrößen am Anfang des folgenden Intervalls berechnen kann.

$$Q_{i+1}(0) = Q_i(0) + P_{i+1}$$

$$M_{i+1}(0) = Q_i(0)l_i + M_i(0) + M_{K i+1}$$

$$y'_{i+1}(0) = \frac{1}{E_i J_i} \left\{ Q_i(0) \frac{l_i^2}{2} + M_i(0)l_i \right\} + y'_i(0)$$

$$y_{i+1}(0) = \frac{1}{E_i J_i} \left\{ Q_i(0) \frac{l_i^3}{6} + M_i(0) \frac{l_i^2}{2} \right\} + y_i(0)l_i + y_i(0)$$

Ich schreibe dieses Gleichungssystem nun noch in Matrizenform und füge, um eine quadratische Matrix zu erhalten, als fünfte Gleichung die Identität $1 = 1$ hinzu.

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ M \\ Q \\ 1_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_i \frac{1}{E_i J_i} \frac{l_i^2}{2} & \frac{1}{E_i J_i} \frac{l_i^3}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{E_i J_i} l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ M \\ Q \\ 1_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{K i+1} \\ P_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

oder abgekürzt

$$z_{i+1} = a_i \cdot z_i$$

Der Zustandsvektor an der Stelle $i+1$, z_{i+1} , ergibt sich durch Multiplikation des Zustandsvektors an der Stelle i , z_i , mit der Uebertragungsmatrix a_i . Die Glieder der Uebertragungsmatrix sind aus den Daten der einzelnen Intervalle zu errechnen.

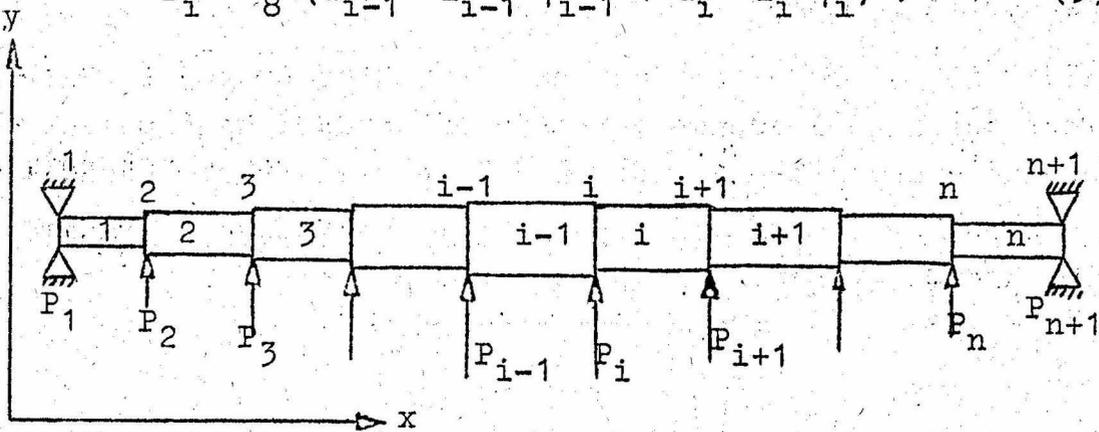
Zwei Elemente des Zustandsvektors z_1 erhält man aus den Randbedingungen am Wellenanfang, die übrigen als Unbekannte in der Rechnung, bis man sie aus den Randbedingungen bestimmen kann, die man an einer Lagerstelle oder am Wellenende erhält. In einigen Fällen lässt sich durch vorherige Berechnung der Auflagerkräfte die Zahl der Unbekannten herabsetzen.

3.) Das Verfahren von K u l l oder das y-Verfahren von G r a m m e l

Das Verfahren von K u l l, das auch als y-Verfahren von G r a m m e l bezeichnet wird, ist eines der einfachsten Verfahren zur angenäherten Berechnung der ersten biegekritischen Drehzahl zweifach gelagerter Wellen ohne und mit Berücksichtigung der Kreiselwirkung. Es benutzt die statische Biegelinie der Welle unter ihrem in Einzelkräfte an den Intervallgrenzen umgerechneten Eigengewicht.

Es soll zunächst eine zweifach endgelagerte Welle betrachtet werden. Die Einzelkraft an der Stelle i bestimmt man aus der Beziehung

$$P_i = \frac{\pi}{8} (d_{i-1}^2 l_{i-1} \gamma_{i-1} + d_i^2 l_i \gamma_i) . \quad (3)$$



d_i, l_i und γ_i sind Durchmesser, Länge und spezifisches Gewicht des i -ten Wellenabschnittes. Die Kräfte über den Lagern werden nicht benötigt, da sie zur Durchbiegung nicht beitragen.

Vom Zustandsvektor \mathfrak{z}_1 sind Auslenkung und Moment durch die Randbedingungen am Anfang der Welle festgelegt:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ M_1 &= 0 \end{aligned}$$

Neigung und Querkraft sind unbekannt. Die Querkraft kann man jedoch durch die Berechnung der Auflagerkraft am Wellenanfang, P_1 , bestimmen, denn für das erste Intervall gilt:

$$Q_1 = P_1 .$$

Das erweist sich im Interesse der Rechenzeit als zweckmässig, da man dann die Grösse y_1 als einzige Unbekannte in der Rechnung hat.

Die Auflagerkraft am Wellenanfang ergibt sich zu

$$P_1 = - \frac{\sum_{j=2}^n P_j (l_n + l_{n-1} + \dots + l_j)}{\sum_{j=1}^n l_j} \quad (4)$$

Nun folgt die Berechnung der elastischen Linie nach Gleichung (2). Die Kreiselmomente M_K sind dabei gleich Null zu setzen, da die Biegelinie unter dem alleinigen Einfluss des Eigengewichtes bestimmt wird.

Die Unbekannte y_1 ermittelt man nach Durchrechnung der Welle aus einer der am Wellenende vorhandenen Randbedingungen. Damit ist der Zustandsvektor \mathfrak{z}_i für jede Intervallgrenze bekannt.

Einen Näherungswert für die erste kritische Frequenz erhält man ohne Kreiselwirkung aus der Beziehung

$$\omega = \sqrt{g \frac{\sum_{j=1}^{n+1} P_j \dot{y}_j}{\sum_{j=1}^{n+1} P_j y_j^2}} \quad (5)$$

und mit Berücksichtigung der Kreiselwirkung zu

$$\omega = \sqrt{g \frac{\sum_{j=1}^{n+1} P_j y_j}{\sum_{j=1}^{n+1} P_j y_j^2 - \sum_{j=1}^{n+1} B_j y_j'^2 (q_j - 1)}} \quad (6)$$

Darin ist g die Erdbeschleunigung und q_j der Verhältnisswert des axialen Massenträgheitsmomentes A_j zum äquatorialen Massenträgheitsmoment B_j der Scheibe, deren Kreiselmoment an der

Stelle j wirksam ist. Der nach Gleichung (5) oder Gleichung (6) errechnete Wert bildet eine obere Schranke für die exakte Frequenz.

Wenn keine allzu grosse Genauigkeit erforderlich ist, kann das Kull'sche bzw. Grammel'sche Verfahren auch bei überhängenden Wellen verwendet werden. Die Kräfte P_1 berechnet man wieder nach Gleichung (3). Dabei ist jedoch zu beachten, dass nach dem Ueberschreiten einer Lagerstelle die Kraftrichtung umzudrehen ist.

Es empfiehlt sich auch hier, die Lagerkräfte zu bestimmen. Man kann dann über eine Lagerstelle hinwegrechnen wie über eine gewöhnliche Intervallgrenze. Ausserdem ist bei der einseitig überhängenden Welle wieder nur y_1^j als einzige Unbekannte in der Rechnung, wenn man mit dieser am aufgelagerten Wellenende beginnt. Den Wert von y_1^j erhält man aus einer der Randbedingungen an der zweiten Lagerstelle oder am Wellenende.

Bei beidseitig überhängenden Wellen sind vom Zustandsvektor \mathcal{Z}_1 nur Moment und Querkraft bekannt. Beide sind Null. y_1 und y_1^j bleiben als Unbekannte in der Rechnung, bis man sie aus den Randbedingungen an den Lagerstellen oder am Wellenende bestimmen kann. Im Interesse eines ununterbrochenen Rechenganges wird man dies erst nach Durchrechnung der Welle bis zum Ende tun.

Die kritische Frequenz ergibt sich wieder aus Gleichung (5) oder Gleichung (6).

4.) Das Iterationsverfahren von S t o d o l a

Es handelt sich hier um ein Iterationsverfahren, das gestattet, sowohl die erste biegekritische Frequenz als auch die dazugehörige Auslenkungsform zweifach gelagerter Wellen ohne und mit Berücksichtigung der Kreiselwirkung beliebig genau anzunähern. Seine Konvergenz ist so gut, dass man häufig ohne Iteration auskommt. Dann ist der Rechenaufwand kaum grösser als beim Verfahren von K u l l.

Leider besteht für Wellen mit überhängenden Enden nach H o l b a "Berechnungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen von geraden Wellen", nicht in allen Fällen Konvergenz.

Beim Verfahren von S t o d o l a wird die elastische Linie nicht unter dem Einfluss des Eigengewichtes, sondern unter dem Einfluss einer Fliehkraftbelastung berechnet. Für die erste Durchrechnung nimmt man eine mit den Randbedingungen des Systems verträgliche Biegelinie y_I an, die der zu erwartenden wirklichen Auslenkungsform möglichst gut entspricht. Die Durchbiegungen und bei Berücksichtigung der Kreiselwirkung auch die Neigungen an den Intervallgrenzen, $y_{I,i}$ und $y'_{I,i}$, werden zahlenmässig festgelegt. Bei den Iterationen sind sie aus der jeweils vorangegangenen Durchrechnung bekannt.

Es soll hier die Berechnung des P-ten Näherungswertes für die kritische Frequenz betrachtet werden. Die einzelnen Grössen werden durch den Index P gekennzeichnet. Für die Biegelinie y_P hat die Fliehkraftbelegung bei einer Hilfsfrequenz

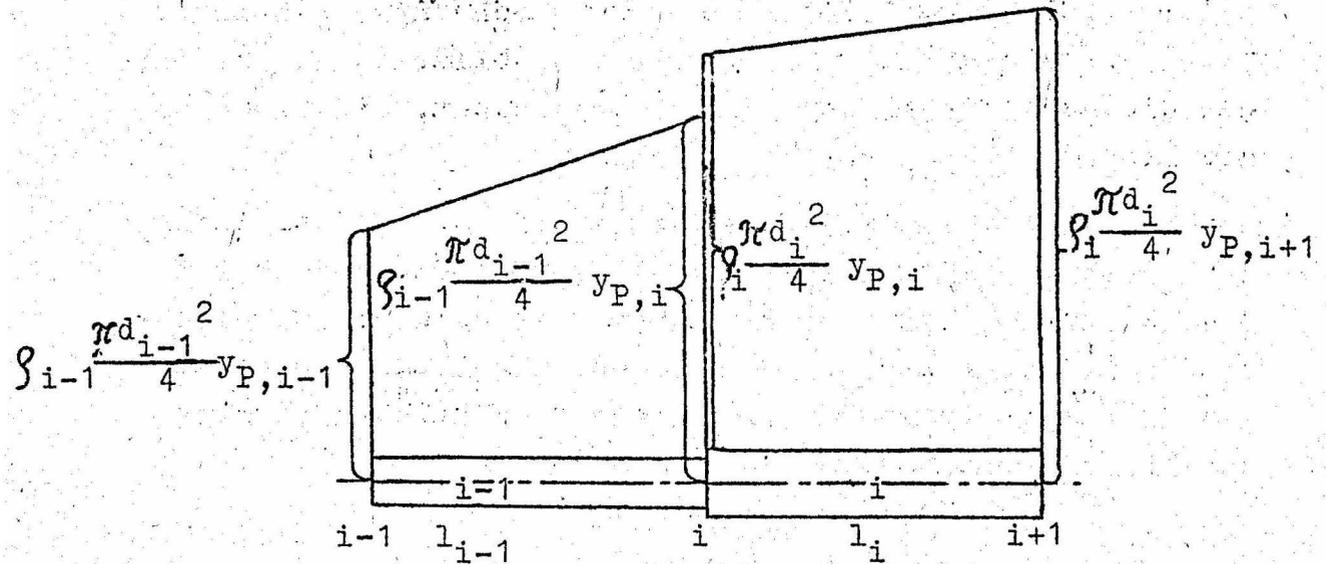
$$\omega_0 = 1 \frac{1}{\text{sec}}$$

die Grösse

$$q = \varrho \frac{\pi d^2}{4} \omega_0^2 y_P \cdot$$

Darin ist ϱ die spezifische Masse der Welle und d der Wellendurchmesser. Die Dimension von q ist kg/cm , da für ω_0^2 der dimensionsbehaftete Zahlenwert 1 sec^{-2} eingesetzt ist.

Die Fliehkraftbelegung muss in Einzelkräfte an den Intervallgrenzen umgerechnet werden. Zur Vereinfachung dieser Rechnung nimmt man den Verlauf der Biegelinie innerhalb eines Intervalls geradlinig an, so dass man über jedem Intervall eine trapezförmige Fliehkraftbelastung erhält. Die an der Stelle i wirkende Einzelkraft setzt sich aus Anteilen der Intervalle $i-1$ und i zusammen:



$$P_{P,i} = \frac{\pi}{8} \left\{ S_{i-1} d_{i-1}^2 l_{i-1} y_{P,i-1} + S_i d_i^2 l_i y_{P,i} + \frac{2}{3} S_{i-1} d_{i-1}^2 l_{i-1} (y_{P,i} - y_{P,i-1}) + \frac{1}{3} S_i d_i^2 l_i (y_{P,i+1} - y_{P,i}) \right\}$$

$$P_{P,i} = \frac{\pi}{8} \left\{ S_{i-1} d_{i-1}^2 l_{i-1} \left(\frac{1}{3} y_{P,i-1} + \frac{2}{3} y_{P,i} \right) + S_i d_i^2 l_i \left(\frac{2}{3} y_{P,i} + \frac{1}{3} y_{P,i+1} \right) \right\} \quad (7)$$

Die Kräfte über den Lagern brauchen nicht berechnet zu werden, denn sie tragen zur Durchbiegung nicht bei.

Da sich der weitere Rechengang bei Berücksichtigung der Kreiselwirkung von dem ohne Kreiselwirkung unterscheidet, soll diese erst einmal vernachlässigt werden.

Wie schon beim Verfahren von K u l l beschrieben, berechnet man mit Hilfe der Gleichung (2) eine neue elastische Linie y_{P+1} . Die P-te Näherung für die kritische Frequenz ergibt sich dann nach S t o d o l a aus der Beziehung

$$\omega_P = \sqrt{\frac{y_{P,h}}{y_{P+1,h}}} \quad (8)$$

Die richtige Dimension der rechten Seite dieser Gleichung kommt durch die schon zahlenmässig eingesetzte Hilfsfrequenz $\omega_0 = 1 \text{ sec}^{-1}$ zustande. Die Stelle h ist etwa in der Mitte der Welle zu wählen, wo die grösste Durchbiegung auftritt.

Weichen die einzelnen Verhältnswerte $\frac{y_{P,i}}{y_{P+1,i}}$ stark voneinander ab, ist eine Wiederholung der Rechnung angebracht, wobei die Biegelinie y_{P+1} den Ausgang bildet. Mit ihr werden die neuen Fliehkräfte $P_{P+1,i}$ berechnet, die wiederum die Biegelinie y_{P+2} zur Folge haben.

Nun soll die Kreiselwirkung berücksichtigt werden. Auch dann gelten Gleichung (7) und Gleichung (8), jedoch ist die elastische Linie unter dem Einfluss sowohl der Fliehkräfte $P_{P,i}$ als auch der Kreiselmomente $M_{K P,i}$ zu bestimmen. Die Kreiselmomente werden wie die Fliehkräfte mit der Hilfsfrequenz

$$\omega_0 = 1 \frac{1}{\text{sec}}$$

berechnet. Man erhält sie aus der Gleichung

$$M_{K P,i} = (q_i - 1) B_i y'_{P,i} \quad (9)$$

Bei der Berechnung der Lagerkräfte müssen nun auch die von den Kreiselmomenten hervorgerufenen Reaktionen berücksichtigt werden. Die Lagerkraft am Anfang einer zweifach endgelagerten Welle, $P_{P,1}$, berechnet sich jetzt z.B. aus der Gleichung

$$P_{P,1} = - \frac{\sum_{j=2}^n P_{P,j} (l_n + l_{n-1} + \dots + l_j) + \sum_{j=1}^{n+1} M_{K P,j}}{\sum_{j=1}^n l_j} \quad (10)$$

Die Bestimmung der elastischen Linie geht vor sich wie schon beschrieben, nur dass in den Uebertragungsmatrizen der Gleichung (2) die $M_{K P,i}$ ungleich Null sind.

Der P-te Näherungswert für die kritische Frequenz ergibt sich auch hier aus Gleichung (8).

5.) Das y^2 - Verfahren von G r a m m e l

Das y^2 - Verfahren von G r a m m e l ist eine Weiterentwicklung des Verfahrens von S t o d o l a, bei der die

Abhängigkeit des Ergebnisses von der Wahl der Stelle h durch eine Mittelwertbildung beseitigt ist. Danach ergibt sich die P -te Näherung für die erste kritische Frequenz zu

$$\omega_P = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n+1} m_j y_{P,j}^2}{\sum_{j=1}^{n+1} m_j y_{P,j} y_{P+1,j}}} \quad (11)$$

Da jedoch die Ausdrücke $m_j y_{P,j}$ genau wie die nach Gleichung (7) zu berechnenden $P_{P,j}$ die Fliehkräfte bei der Hilfsfrequenz $\omega_0 = 1 \text{ sec}^{-1}$ darstellen, führe ich diese Fliehkräfte in Gleichung (11) ein:

$$\omega_P = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n+1} P_{P,j} y_{P,j}}{\sum_{j=1}^{n+1} P_{P,j} y_{P+1,j}}} \quad (12)$$

Das y^2 - Verfahren lässt sich auch auf mehrfach gelagerte Wellen anwenden. Die Berechnung der elastischen Linie wird dabei aber ziemlich umfangreich. Da es sich um ein statisch unbestimmtes System handelt, kann man die Auflagerkräfte nicht vorher ermitteln und muss deshalb den Rechengang an jeder Lagerstelle unterbrechen.

Vom Zustandsvektor \mathfrak{z}_1 sind nur zwei Elemente aus den Randbedingungen am Wellenanfang zu bestimmen. Die beiden anderen bleiben als Unbekannte in der Rechnung. Eine davon lässt sich an der nächsten Lagerstelle aus der Bedingung, dass dort die Durchbiegung gleich Null sein muss, ausrechnen. Man bekommt jedoch gleichzeitig mit der Lagerkraft eine neue Unbekannte in die Rechnung, die sich an der nächsten Lagerstelle bestimmen lässt. Jedoch auch die hier auftretende neue Lagerkraft ist unbekannt. Erst am Ende der Welle stehen zwei Randbedingungen zur Verfügung, aus denen man beide Unbekannten bestimmen kann.

Der P -te Näherungswert für die kritische Frequenz ergibt sich wieder aus Gleichung (12).

Die Berücksichtigung der Kreiselwirkung ist beim y^2 - Verfahren recht kompliziert, denn man muss Durchbiegung und Neigung der Welle sowohl infolge der Fliehkräfte als auch unabhängig davon infolge der Kreiselmomente bestimmen.

Bei der Berechnung des P-ten Näherungswertes für die kritische Frequenz geht man von den aus der vorangegangenen Durchrechnung bekannten Biegelinien y_P und η_P aus. y_P ist unter dem alleinigen Einfluss der Fliehkräfte, η_P unter dem alleinigen Einfluss der Kreiselmomente bestimmt. Der Berechnung der Fliehkräfte und Kreiselmomente wird die aus der Ueberlagerung der beiden Biegelinien y_P und η_P resultierende Biegelinie zugrunde gelegt. Zur ersten Durchrechnung muss eine mit den Randbedingungen zu vereinbarende elastische Linie angenommen werden.

Die Fliehkräfte erhält man entsprechend Gleichung (7) aus

$$P_{P,i} = \frac{\pi}{8} \left\{ \varrho_{i-1} d_{i-1}^2 l_{i-1} \left[\frac{1}{3}(y_{P,i-1} + \eta_{P,i-1}) + \frac{2}{3}(y_{P,i} + \eta_{P,i}) \right] + \varrho_i d_i^2 l_i \left[\frac{2}{3}(y_{P,i} + \eta_{P,i}) + \frac{1}{3}(y_{P,i+1} + \eta_{P,i+1}) \right] \right\} \quad (13)$$

Die Kreiselmomente ergeben sich aus der Gleichung

$$M_{K P,i} = (q_i - 1) B_i (y'_{P,i} + \eta'_{P,i}) \quad (14)$$

Die Durchbiegungen und Neigungen werden in der schon beschriebenen Weise nach Gleichung (2) berechnet. Bei der Bestimmung von $y_{P+1,i}$ und $y'_{P+1,i}$ sind die Kreiselmomente $M_{K P,i}$, bei der Berechnung von $\eta_{P+1,i}$ und $\eta'_{P+1,i}$ die Kräfte $P_{P,i}$ gleich Null zu setzen.

Die P-te Näherung für die kritische Frequenz erhält man nach Grammel bei Berücksichtigung der Kreiselwirkung zu

$$\omega_P = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n+1} m_j (y_{P,j} + \eta_{P,j})^2}{\sum_{j=1}^{n+1} m_j (y_{P,j} + \eta_{P,j}) y_{P+1,j}} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n+1} (q_j - 1) B_j (y_{P,j} + \eta_{P,j}) \eta_{P+1,j}}{\sum_{j=1}^{n+1} m_j (y_{P,j} + \eta_{P,j}) y_{P+1,j}} \right) \right] \quad (15)$$

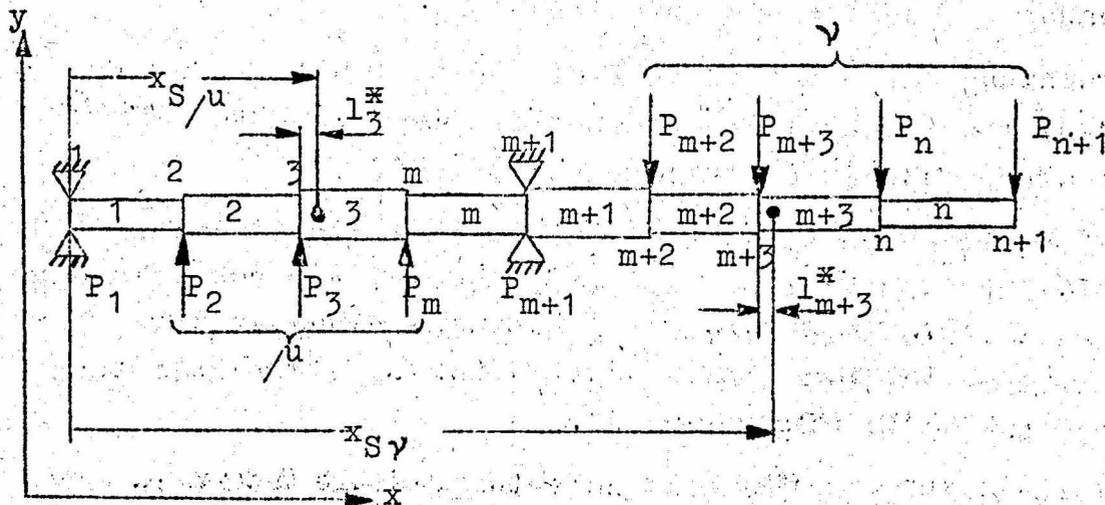
Führt man in diese Gleichung die schon bekannten Fliehkräfte und Kreismomente ein, lautet sie

$$\omega_P = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n+1} P_{P,j} (y_{P,j} + \eta_{P,j})}{\sum_{j=1}^{n+1} P_{P,j} y_{P+1,j} - \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} P_{P,j} y_{P+1,j} \sum_{l=1}^{n+1} M_{K P,l} \eta_{P+1,l}}} \right] \quad (16)$$

6.) Das Verfahren von Z e r k o w i t z

In den Fällen, in denen andere Verfahren wegen fehlender Konvergenz bei überhängenden Wellen versagen, kann man die erste kritische Frequenz ohne Berücksichtigung der Kreiselwirkung nach dem Verfahren von Z e r k o w i t z bestimmen.

Es soll zuerst eine einseitig überhängende Welle betrachtet werden. Die Berechnung der Kräfte an den Intervallgrenzen erfolgt wie beim Kull'schen Verfahren nach Gleichung (3).



Dann fasst man die durch das Lager getrennten Kräfte zu zwei Kräftegruppen μ und ν zusammen und bestimmt den Schwerpunkt jeder Kräftegruppe aus den Gleichungen

$$x_{s/\mu} = \frac{\sum_{j=2}^m P_j (l_1 + l_2 + \dots + l_{j-1})}{\sum_{j=2}^m P_j} \quad (17)$$

$$x_{s/\nu} = \frac{\sum_{j=m+2}^{n+1} P_j (l_1 + l_2 + \dots + l_{j-1})}{\sum_{j=m+2}^{n+1} P_j} \quad (18)$$

Dabei zählen $x_{s/\mu}$ und $x_{s/\nu}$ vom Wellenanfang.

Es sind jetzt die Intervalle zu ermitteln, in die die Kräfteschwerpunkte fallen, sowie die Entfernungen l_i^* von den entsprechenden Intervallanfängen.

Beim Verfahren von Z e r k o w i t z müssen zwei elastische Linien bestimmt werden, eine unter der alleinigen Wirkung der Kräfte der Gruppe μ und eine unter der alleinigen Wirkung der Kräfte der Gruppe ν . Um zu kennzeichnen, infolge welcher Kräftegruppe die Durchbiegungen zustande gekommen sind, wird die Bezeichnung μ oder ν als Index angehängt.

Die Berechnung der elastischen Linie erfolgt wie schon beschrieben, wobei einmal die Kräfte der Gruppe μ und einmal die der Gruppe ν gleich Null zu setzen sind.

An den Schwerpunkten wird die Durchbiegung nach Gleichung (1) bestimmt. Dabei ist für x_i l_i^* einzusetzen. Zur Bezeichnungsweise sei gesagt, dass z.B. $y_{\mu,\nu}$ die Auslenkung an der Schwerpunktsstelle der Kräftegruppe μ infolge der Belastung durch die Kräfte der Gruppe ν ist.

Sind die Auslenkungen für beide Belastungsfälle bekannt, ergibt sich nach Z e r k o w i t z die kritische Frequenz zu

$$\omega = \sqrt{\frac{Eg}{F_0}} \quad (19)$$

Darin bedeutet

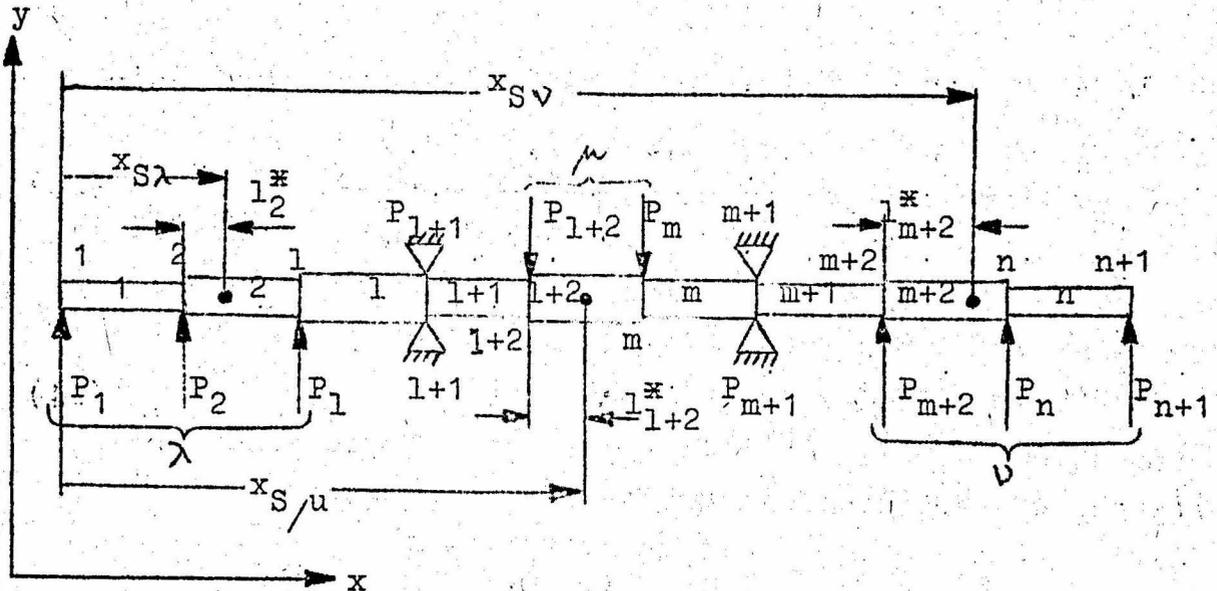
$$f_0 = \frac{\sum_{j=2}^m P_j(y_{j,u} + \lambda y_{j,v})(y_{j,u} + y_{j,v}) + \sum_{j=m+2}^{n+1} P_j(y_{j,u} + \lambda y_{j,v})(y_{j,u} + y_{j,v})}{\sum_{j=2}^m P_j(y_{j,u} + \lambda y_{j,v}) + \sum_{j=m+2}^{n+1} P_j(y_{j,u} + \lambda y_{j,v})} \quad (20)$$

λ ist ein Formbeiwert, den man aus der Gleichung

$$\lambda = \frac{-(y_{u,u} - y_{v,v}) + \sqrt{(y_{u,u} - y_{v,v})^2 + 4 y_{u,v} y_{v,u}}}{2 y_{u,v}} \quad (21)$$

erhält.

Bei der Anwendung des Verfahrens auf eine beidseitig überhängende Welle ist analog vorzugehen. Man bildet drei durch die Lager getrennte Kräftegruppen, λ , u und v und bestimmt ihre Schwerpunkte.



Dann ist die Berechnung von drei Biegelinien erforderlich, eine unter der Wirkung der Kräftegruppe λ , eine infolge der Kräftegruppe u und eine dritte unter dem Einfluss der Kräftegruppe v . Die Kräfte der beiden nicht zu berücksichtigenden Gruppen sind gleich Null zu setzen.

Die kritische Frequenz erhält man wieder aus Gleichung (19).
 f_0 bedeutet hier jedoch

$$f_0 = \frac{\sum_{j=1}^1 P_j(\varphi y_{j,\lambda} + y_{j,\mu} + \psi y_{j,\nu})(y_{j,\lambda} + y_{j,\mu} + y_{j,\nu}) + \dots}{\sum_{j=1}^1 P_j(\varphi y_{j,\lambda} + y_{j,\mu} + \psi y_{j,\nu}) + \dots} \dots$$

$$\frac{\sum_{j=1+2}^m P_j(\varphi y_{j,\lambda} + y_{j,\mu} + \psi y_{j,\nu})(y_{j,\lambda} + y_{j,\mu} + y_{j,\nu}) + \dots}{\sum_{j=1+2}^m P_j(\varphi y_{j,\lambda} + y_{j,\mu} + \psi y_{j,\nu}) + \dots} \dots$$

$$\frac{\sum_{j=m+2}^{n+1} P_j(\varphi y_{j,\lambda} + y_{j,\mu} + \psi y_{j,\nu})(y_{j,\lambda} + y_{j,\mu} + y_{j,\nu})}{\sum_{j=m+2}^{n+1} P_j(\varphi y_{j,\lambda} + y_{j,\mu} + \psi y_{j,\nu})} \dots \quad (22)$$

φ und ψ sind Formbeiwerte. Man berechnet sie aus den Gleichungen

$$\varphi = \frac{y_0 y_{\lambda,\nu} + y_{\lambda,\mu} y_{\mu,\nu} - y_{\lambda,\nu} y_{\mu,\mu}}{y_0 y_{\mu,\nu} - y_{\lambda,\lambda} y_{\mu,\nu} + y_{\lambda,\nu} y_{\mu,\lambda}} \quad (23)$$

$$\psi = \frac{\varphi(y_0 - y_{\lambda,\lambda}) - y_{\lambda,\mu}}{y_{\lambda,\nu}} \quad (24)$$

y_0 ist aus der kubischen Gleichung

$$y_0^3 - A_1 y_0^2 + A_2 y_0 - A_3 = 0 \quad (25)$$

zu bestimmen mit

$$A_1 = y_{\lambda,\lambda} + y_{\mu,\mu} + y_{\nu,\nu} \quad (26)$$

$$A_2 = y_{\lambda, \lambda} y_{/u, /u}^+ y_{\lambda, \lambda} y_{\nu, \nu} + y_{/u, /u} y_{\nu, \nu} - y_{\lambda, /u} y_{/u, \lambda} - y_{\lambda, \nu} y_{\nu, \lambda} - y_{/u, \nu} y_{\nu, /u} \quad (27)$$

$$A_3 = y_{\lambda, \lambda} y_{/u, /u} y_{\nu, \nu} + y_{/u, \lambda} y_{\lambda, \nu} y_{\nu, /u} + y_{\nu, \lambda} y_{\lambda, /u} y_{/u, \nu} - y_{\lambda, \lambda} y_{/u, \nu} y_{\nu, /u} - y_{/u, /u} y_{\lambda, \nu} y_{\nu, \lambda} - y_{\nu, \nu} y_{\lambda, /u} y_{/u, \lambda} \quad (28)$$

Das Verfahren lässt sich auch auf zweifach endgelagerte und mehrfach gelagerte Wellen anwenden. Doch erfordern in diesen Fällen die schon beschriebenen Verfahren einen erheblich geringeren Rechenaufwand.

Es ist überhaupt eine besonders für die numerische Berechnung der Durchbiegung unangenehme Eigenschaft des Verfahrens von Z e r k o w i t z, dass man die Auslenkungen an den Kräfte-schwerpunkten braucht. Diese Punkte liegen nicht von vorn-herin fest, und man kann sie daher nicht in die Intervall-einteilung der Welle einbeziehen. Das hat verschiedene Nebenrechnungen und die Unterbrechung des Rechenganges an den Schwerpunkten zur Folge. Ein weiterer Nachteil dieses Verfahrens ist, dass man für einseitig und beidseitig überhängende Wellen zwei verschiedene Programme braucht.

Bei der Berücksichtigung dieser Umstände greift man vielleicht doch vorteilhafter auf die Restwertverfahren zurück.

7.) Das Verfahren von T r a e n k l e

Beim Verfahren von T r a e n k l e handelt es sich um ein Iterationsverfahren, das sich zur gemeinsamen Bestimmung der beiden ersten biegekritischen Drehzahlen von zwei und mehrfach gelagerten Wellen eignet. Es lässt sich mit und ohne Berücksichtigung der Kreiselwirkung durchführen.

Die Kreiselwirkung soll zunächst zu vernachlässigen sein. Der Berechnung des P-ten Näherungswertes für die kritische Frequenz werden je eine Biegelinie erster und zweiter Ordnung, $y_{A,P}$ und $y_{B,P}$, zugrunde gelegt. Für die erste

Durchrechnung sind sie den Randbedingungen entsprechend anzunehmen. Bei den Iterationen erhält man sie aus dem vorangehenden Rechengang. Es werden die Fliehkräfte $P_{A,P,i}$ und $P_{B,P,i}$ aus Gleichung (7) bestimmt und mit ihnen nach Gleichung (2) in bekannter Weise je eine Biegelinie erster und zweiter Ordnung, $y_{a,P}$ und $y_{b,P}$, ermittelt. Aus den nun vorhandenen vier elastischen Linien sind einige Summenausdrücke zu berechnen, nämlich

$$\begin{aligned}\alpha_{A,a,P} &= \sum^m y_{A,P} y_{a,P} \\ \alpha_{A,b,P} &= \sum^m y_{A,P} y_{b,P} \\ \alpha_{B,b,P} &= \sum^m y_{B,P} y_{b,P} \\ \beta_{A,A,P} &= \sum^m y_{A,P}^2 \\ \beta_{A,B,P} &= \sum^m y_{A,P} y_{B,P} \\ \beta_{B,B,P} &= \sum^m y_{B,P}^2\end{aligned}$$

Werden die bekannten Fliehkräfte in diese Gleichungen eingeführt, erhält man

$$\begin{aligned}\alpha_{A,a,P} &= \sum_{j=2}^n P_{A,P,j} y_{a,P,j} \\ \alpha_{A,b,P} &= \sum_{j=2}^n P_{A,P,j} y_{b,P,j} \\ \alpha_{B,b,P} &= \sum_{j=2}^n P_{B,P,j} y_{b,P,j} \\ \beta_{A,A,P} &= \sum_{j=2}^n P_{A,P,j} y_{A,P,j} \\ \beta_{A,B,P} &= \sum_{j=2}^n P_{A,P,j} y_{B,P,j} \\ \beta_{B,B,P} &= \sum_{j=2}^n P_{B,P,j} y_{B,P,j}\end{aligned}$$

(29)

Nach T r a e n k l e berechnet sich die P-te Näherung für die kritischen Frequenzen erster und zweiter Ordnung zu

$$\omega_{A,P} = \sqrt{\frac{b_P - \sqrt{b_P^2 - 4 a_P c_P}}{2 a_P}} \quad (30)$$

$$\omega_{B,P} = \sqrt{\frac{b_P + \sqrt{b_P^2 - 4 a_P c_P}}{2 a_P}} \quad (31)$$

mit

$$a_P = \alpha_{A,a,P} \alpha_{B,b,P} - \alpha_{A,b,P}^2$$

$$b_P = \alpha_{A,a,P} \beta_{B,B,P} + \alpha_{B,b,P} \beta_{A,A,P} - 2 \alpha_{A,b,P} \beta_{A,B,P} \quad (32)$$

$$c_P = \beta_{A,A,P} \beta_{B,B,P} - \beta_{A,B,P}^2$$

Soll keine weitere Iteration durchgeführt werden, kann man die Rechnung hier abbrechen; anderenfalls sind noch die beiden Biegelinien zu ermitteln, die den Ausgang für die nächste Iteration bilden. Man erhält sie aus den Gleichungen

$$y_{A,P+1,i} = y_{a,P,i} + \lambda_{A,P} y_{b,P,i} \quad (33)$$

$$y_{B,P+1,i} = \lambda_{B,P} y_{a,P,i} + y_{b,P,i} \quad (34)$$

Die Formfaktoren $\lambda_{A,P}$ und $\lambda_{B,P}$ bestimmen sich zu

$$\lambda_{A,P} = - \frac{\alpha_{A,b,P} \omega_{A,P}^2 - \beta_{A,B,P}}{\alpha_{B,b,P} \omega_{A,P}^2 - \beta_{B,B,P}} \quad (35)$$

$$\lambda_{B,P} = \frac{\alpha_{A,b,P} \omega_{B,P}^2 - \beta_{A,B,P}}{\alpha_{A,a,P} \omega_{B,P}^2 - \beta_{A,A,P}} \quad (36)$$

Falls man eine Kontrolle für die Güte der Näherung zu haben wünscht, sind zwei weitere elastische Linien aus den beiden Gleichungen

$$y_{\alpha,P,i} = \lambda_{A,P} y_{B,P,i} + y_{A,P,i} \quad (37)$$

$$y_{B,P,i} = \lambda_{B,P} y_{A,P,i} + y_{B,P,i} \quad (38)$$

zu berechnen. Für exakte Frequenzen und Auslenkungsformen gilt an allen Stellen i

$$\omega_{A,P}^2 = \frac{y_{\alpha,P,i}}{y_{A,P+1,i}} \quad (39)$$

$$\omega_{B,P}^2 = \frac{y_{B,P,i}}{y_{B,P+1,i}} \quad (40)$$

Weichen die einzelnen Verhältniswerte stark voneinander ab, ist eine Wiederholung des Verfahrens angebracht. Den Ausgang bilden dabei die Biegelinien $y_{A,P+1}$ und $y_{B,P+1}$. Das Verfahren konvergiert jedoch sehr rasch und seine Genauigkeit ist so gross, dass bei gut gewählten Ansatzfunktionen eine Iteration vielfach unterbleiben kann.

Nun soll die Kreiselwirkung berücksichtigt werden. Dazu braucht man von den beiden elastischen Linien $y_{A,P}$ und $y_{B,P}$ auch die Neigung an den Intervallgrenzen, $y'_{A,P,i}$ und $y'_{B,P,i}$, denn ausser den Fliehkräften $P_{A,P,i}$ und $P_{B,P,i}$ nach Gleichung (7) müssen die Kreiselmomente $M_{K A,P,i}$ und $M_{K B,P,i}$ nach Gleichung (9) berechnet werden. Die Bestimmung der Biegelinien $y_{a,P}$ und $y_{b,P}$ und deren Neigungen $y'_{a,P,i}$ und $y'_{b,P,i}$ erfolgt mit Gleichung (2) unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Fliehkräfte und Kreiselmomente. Neben den Ausdrücken von Gleichung (29) sind hier die Summen

$$\gamma_{A,A,P} = \sum^B y'_{A,P}{}^2 (q - 1)$$

$$\gamma_{A,B,P} = \sum^B y'_{A,P} y'_{B,P} (q - 1)$$

$$\gamma_{B,B,P} = \sum^B y'_{B,P}{}^2 (q - 1)$$

$$\delta_{A,a,P} = \sum^B y'_{A,P} y'_{a,P} (q - 1)$$

$$\delta_{A,b,P} = \frac{1}{2} \left[\sum^B y'_{A,P} y'_{b,P} (q - 1) + \sum^B y'_{B,P} y_{a,P} (q - 1) \right]$$

$$\delta_{B,b,P} = \sum^B y'_{B,P} y'_{b,P} (q - 1)$$

zu berechnen.

Nach Einführung der bekannten Kreiselmomente lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \gamma_{A,A,P} &= \sum_{j=1}^{n+1} M_{K A,P,j} \gamma'_{A,P,j} \\
 \gamma_{A,B,P} &= \sum_{j=1}^{n+1} M_{K A,P,j} \gamma'_{B,P,j} \\
 \gamma_{B,B,P} &= \sum_{j=1}^{n+1} M_{K B,P,j} \gamma'_{B,P,j} \\
 \delta_{A,a,P} &= \sum_{j=1}^{n+1} M_{K A,P,j} \gamma'_{a,P,j} \\
 \delta_{A,b,P} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n+1} M_{K A,P,j} \gamma'_{b,P,j} + \sum_{j=1}^{n+1} M_{K B,P,j} \gamma'_{a,P,j} \right] \\
 \delta_{B,b,P} &= \sum_{j=1}^{n+1} M_{K B,P,j} \gamma'_{b,P,j}
 \end{aligned} \tag{41}$$

Die Frequenzen erhält man wieder aus Gleichung (30) und Gleichung (31). Die Grössen a_P , b_P und c_P haben hier jedoch nicht die Bedeutung von Gleichung (32), sondern ergeben sich aus

$$\begin{aligned}
 a_P &= a_{A,a,P} a_{B,b,P} - a_{A,b,P}^2 \\
 b_P &= a_{A,a,P} b_{B,B,P} + a_{B,b,P} b_{A,A,P} - 2a_{A,b,P} b_{A,B,P} \\
 c_P &= b_{A,A,P} b_{B,B,P} - b_{A,B,P}^2
 \end{aligned} \tag{42}$$

mit

$$\begin{aligned}
 a_{A,a,P} &= \alpha_{A,a,P} - \delta_{A,a,P} \\
 a_{A,b,P} &= \alpha_{A,b,P} - \delta_{A,b,P} \\
 a_{B,b,P} &= \alpha_{B,b,P} - \delta_{B,b,P} \\
 b_{A,A,P} &= \beta_{A,A,P} - \gamma_{A,A,P} \\
 b_{A,B,P} &= \beta_{A,B,P} - \gamma_{A,B,P} \\
 b_{B,B,P} &= \beta_{B,B,P} - \gamma_{B,B,P}
 \end{aligned} \tag{43}$$

Neben den mit Gleichung (33) und Gleichung (34) bestimm-
baren Durchbiegungen müssen für die folgende Iteration auch
die Neigungen berechnet werden. Man erhält sie aus

$$y'_{A,P+1,i} = y'_{a,P,i} + \lambda_{A,P} y'_{b,P,i} \quad (44)$$

$$y'_{B,P+1,i} = \lambda_{B,P} y'_{a,P,i} + y'_{b,P,i} \quad (45)$$

Die Formfaktoren $\lambda_{A,P}$ und $\lambda_{B,P}$ bestimmt man hier zu

$$\lambda_{A,P} = - \frac{a_{A,b,P} \omega_{A,P}^2 - b_{A,B,P}}{a_{B,b,P} \omega_{A,P}^2 - b_{B,B,P}} \quad (46)$$

$$\lambda_{B,P} = - \frac{a_{A,B,P} \omega_{B,P}^2 - b_{A,B,P}}{a_{A,a,P} \omega_{B,P}^2 - b_{A,A,P}} \quad (47)$$

Eine Kontrolle der Näherungswerte ergibt sich wieder mit
Gleichung (39) und Gleichung (40), nachdem man die Durch-
biegungen $y_{\alpha,P,i}$ und $y_{\beta,P,i}$ nach Gleichung (37) und Gleichung (38) errechnet hat.

8.) Zusammenfassung

Von den behandelten Verfahren besitzt keins die Allgemein-
gültigkeit eines Restwertverfahrens, bei dem man mit einem
Programm sämtliche biegekritischen Drehzahlen bestimmen
kann.

Die Berechnung der ersten biegekritischen Frequenz zwei-
fach gelagerter Wellen lässt sich am einfachsten nach dem
Verfahren von K u l l durchführen. Handelt es sich um end-
gelagerte Wellen, liefert es die Frequenz recht genau. Bei
Wellen mit überhängenden Enden ist die Genauigkeit zwar ge-
ringer aber für viele Fälle noch ausreichend. Die Kreisel-
wirkung kann in einfacher Weise berücksichtigt werden.

Mit dem y^2 - Verfahren von G r a m m e l erhält man nicht
nur die erste kritische Frequenz, sondern auch die dazu-
gehörige Auslenkungsform. Da es sich um ein Iterations-
verfahren handelt, lässt sich beides mit beliebiger Ge-
nauigkeit annähern. Die Konvergenz ist im allgemeinen so

gut, dass selten mehr als eine Iteration erforderlich ist. Das Verfahren lässt sich bei zwei- und mehrfach gelagerten Wellen anwenden, doch steigt der Rechenaufwand bei mehrfach gelagerten Wellen an, so dass man gegenüber den Restwertverfahren keine Vereinfachung mehr erzielt. Die Berücksichtigung der Kreiselwirkung ist komplizierter als beim Kull'schen Verfahren.

Das Verfahren von Z e r k o w i t z kann bei zweifach gelagerten Wellen mit überhängenden Enden verwendet werden, wenn andere Verfahren wegen fehlender Konvergenz versagen. Doch es ist, wie schon im Kapitel 6 beschrieben wurde, für digitale Rechenautomaten nicht gut geeignet. Man benutzt statt dessen besser ein Restwertverfahren.

Das Verfahren von T r a e n k l e liefert sowohl die erste als auch die zweite kritische Frequenz durch Iteration mit beliebiger Genauigkeit. Man erhält dabei gleichzeitig eine Näherung für die ersten beiden Auslenkungsformen. Die Kreiselwirkung kann berücksichtigt werden. Auch diesem Verfahren sind bei mehrfach gelagerten Wellen die Restwertverfahren überlegen, da der Rechenaufwand zu gross wird.

Abschliessend kann gesagt werden, dass das Verfahren von K u l l , das y^2 - Verfahren von G r a m m e l und das Verfahren von T r a e n k l e bei zweifach gelagerten Wellen gewisse Vereinfachungen gegenüber den Restwertverfahren bieten können.

9.) Literatur

- HOLBA, Berechnungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen von geraden Wellen, Springer (1936)
- HOHENEMSER, Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 1. Bd. (1949)
- PESTEL und SCHUMPICH Beitrag zur Schwingungsberechnung einfacher und gekoppelter Stabzüge, Schiffstechnik, Bd. 4, (1957), H. 20.